Εισαγωγή στην Τοπολογία, 8/6/2018, Α. Τόλιας

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα 1.

Καταρχήν εφόσον έχουμε στο $\mathbb{R}$ τη συνήθη μετρική (δηλ. $\rho(x,y) = |x-y|$ για κάθε $x,y \in \mathbb{R}$), για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ η ανοιχτή μπάλα κέντρου x και ακτίνας ε είναι το ανοικτό διάστημα $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, δηλαδή $B_\rho(x,\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

(α) Το σύνολο A δεν είναι ανοικτό, εφόσον $2 \in A$ ενώ δεν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε το ανοικτό διάστημα $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ να περιέχεται στο A.

Για να εξετάσουμε αν το σύνολο A είναι κλειστό πρέπει και αρκεί να εξετάσουμε αν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό σύνολο. Το συμπλήρωμα του A είναι το σύνολο $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, -3] \cup (1,2) \cup (2, +\infty)$. Το σύνολο $\mathbb{R} \setminus A$ δεν είναι ανοικτό διότι περιέχει το σημείο -3, ενώ δεν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε το ανοικτό διάστημα $(-3-\varepsilon, -3+\varepsilon)$ να περιέχεται στο $\mathbb{R} \setminus A$. Επομένως το σύνολο A δεν είναι κλειστό.

(β) Γνωρίζουμε ότι $A^o = \{x \in A : \text{ υπάρχει } \varepsilon > 0 \text{ ώστε } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A\}$. Παρατηρούμε ότι για $x \in (-3,1)$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$ (π.χ. για $\varepsilon = \min\{x+3, 1-x\}$) ενώ δεν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \subseteq A$ και επίσης (όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως) δεν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \subseteq A$. Συνεπώς, σύμφωνα με τα προηγούμενα, το εσωτερικό του A είναι το σύνολο $A^o = (-3, 1)$.

Γνωρίζουμε ότι $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : \text{ για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ ισχύει } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$. Προφανώς το σύνολο $\overline{A}$ περιέχει τα στοιχεία του A. Επίσης το σημείο -3 ανήκει στο $\overline{A}$ εφόσον για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $(-3-\varepsilon, -3+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ (εφόσον ο αριθμός $-3+\delta$ ανήκει στο σύνολο αυτό για μικρά δ). Αν $x < -3$ τότε $x \notin \overline{A}$ (εφόσον για $\varepsilon = -3-x > 0$ το σύνολο $A \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ είναι κενό). Επίσης αν $1 < x < 2$ τότε $x \notin \overline{A}$ (εφόσον για $\varepsilon = \min\{x-1, 2-x\}$ το σύνολο $A \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ είναι κενό) ενώ για $x > 2$ έχουμε $x \notin \overline{A}$ (εφόσον για $\varepsilon = x-2$ το σύνολο $A \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ είναι κενό).

Σύμφωνα με τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η κλειστή θήκη του A είναι $\overline{A} = [-3, 1] \cup \{2\}$.

Για το σύνορο του A έχουμε $\partial(A) = \overline{A} \setminus A^o = \{-3, 1, 2\}$.

Τέλος, έχουμε $A' = \{x \in \mathbb{R} : \text{ για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ ισχύει } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset\}$ (και προφανώς ισχύει $A' \subseteq \overline{A}$). Παρατηρούμε ότι $2 \notin A'$ εφόσον για $0 < \varepsilon < 1$ το σύνολο $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ δεν τέμνει το $A \setminus \{2\}$. Για τα $x \in \overline{A}$ με $x \neq 2$ παρατηρούμε ότι το $A \setminus \{x\}$ τέμνει το $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ για κάθε $\varepsilon > 0$ και άρα $x \in A'$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $A' = [-3, 1]$.

Θέμα 2.

Έστω A τυχόν υποσύνολο του X. Θα δείξουμε ότι το A είναι ανοικτό (με χρήση του ορισμού). Έστω $x \in A$ (και αναζητούμε $\delta > 0$ ώστε $B_\rho(x,\delta) \subseteq A$). Από την υπόθεση υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε η ανοικτή μπάλα $B_\rho(x, \varepsilon_x)$ να είναι πεπερασμένο σύνολο. Προφανώς $x \in B_\rho(x, \varepsilon_x)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν το σύνολο $B_\rho(x, \varepsilon_x)$ περιέχει μόνο το σημείο x τότε για $\delta = \varepsilon_x > 0$ έχουμε $B_\rho(x, \delta) = \{x\} \subseteq A$. Αν το πεπερασμένο σύνολο $B_\rho(x, \varepsilon_x)$ περιέχει και άλλα σημεία εκτός του x τότε γράφεται $B_\rho(x, \varepsilon_x) = \{x, x_1, \ldots, x_n\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Θέτοντας $\delta = \min\{\rho(x, x_i) : i = 1, \ldots, n\}$ έχουμε $\delta > 0$ και $B_\rho(x, \delta) = \{x\} \subseteq A$. Ετσι αποδείχθηκε ότι το A είναι ανοικτό.

Θέμα 3.

(α) Έστω A μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του X (άρα $\operatorname{diam}(A) < +\infty$). Εφόσον $A \subseteq \overline{A}$, έχουμε

$$\{\rho(x,y):\ x,y\in A\}\subseteq\{\rho(x,y):\ x,y\in\overline{A}\}$$

και άρα

$$\sup\{\rho(x,y):\ x,y\in A\}\leq\sup\{\rho(x,y):\ x,y\in\overline{A}\}$$

δηλαδή $\operatorname{diam}(A)\leq\operatorname{diam}(\overline{A})$.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη ότι $\operatorname{diam}(A)=\operatorname{diam}(\overline{A})$ αρκεί συνεπώς να δείξουμε ότι ισχύει $\operatorname{diam}(\overline{A})\leq\operatorname{diam}(A)$. Για να το δείξουμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ ισχύει $\operatorname{diam}(\overline{A})\leq\operatorname{diam}(A)+\varepsilon$.

Έστω $\varepsilon>0$ (και θέλουμε να δείξουμε ότι ο αριθμός $\operatorname{diam}(A)+\varepsilon$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{\rho(x,y):\ x,y\in\overline{A}\}$). Έστω τυχόντα $x,y\in\overline{A}$. Τότε υπάρχουν $x_1\in A$ με $\rho(x,x_1)<\frac{\varepsilon}{2}$ και $y_1\in A$ με $\rho(y,y_1)<\frac{\varepsilon}{2}$. Εφόσον $x_1,y_1\in A$ θα έχουμε $\rho(x_1,y_1)\leq\operatorname{diam}(A)$. Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα προκύπτει ότι

$$\rho(x,y)\leq\rho(x,x_1)+\rho(x_1,y_1)+\rho(y_1,y)\leq\frac{\varepsilon}{2}+\operatorname{diam}(A)+\frac{\varepsilon}{2}=\operatorname{diam}(A)+\varepsilon.$$

Άρα

$$\sup\{\rho(x,y):\ x,y\in\overline{A}\}\leq\operatorname{diam}(A)+\varepsilon$$

δηλαδή $\operatorname{diam}(\overline{A})\leq\operatorname{diam}(A)+\varepsilon$. Αφού αυτό αποδείχθηκε για τυχαίο $\varepsilon>0$ προκύπτει $\operatorname{diam}(\overline{A})\leq\operatorname{diam}(A)$.

Επομένως $\operatorname{diam}(A)=\operatorname{diam}(\overline{A})$.

(β) Έστω τώρα ότι το A είναι συμπαγές. Τότε το A είναι φραγμένο (η απόδειξη αυτή περιέχεται στο ερώτημα 6(α), αν και εδώ η εκφώνηση δίνει εκ των προτέρων ότι το A είναι φραγμένο), άρα $\operatorname{diam}(A)<+\infty$. Αφού $\operatorname{diam}(A)=\{\rho(x,y):\ x,y\in A\}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να επιλέξουμε $x_n,y_n\in A$ ώστε $\rho(x_n,y_n)>\operatorname{diam}(A)-\frac{1}{n}$.

Εφόσον το A είναι συμπαγές είναι ακολουθιακά συμπαγές, δηλαδή κάθε ακολουθία στο A έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε στοιχείο του A. Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο A άρα υπάρχει $a\in A$ και υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $x_{k_n}\xrightarrow{\rho}a$. Η $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης ακολουθία του A άρα, σύμφωνα με τα παραπάνω, υπάρχει $\beta\in A$ και υπακολουθία $(y_{k_{l_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $y_{k_{l_n}}\xrightarrow{\rho}\beta$. Εφόσον η $(x_{k_{l_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ και ισχύει $x_{k_n}\xrightarrow{\rho}a$ θα έχουμε $x_{k_{l_n}}\xrightarrow{\rho}a$.

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$\operatorname{diam}(A)-\frac{1}{n}\leq\operatorname{diam}(A)-\frac{1}{k_{l_n}}<\rho(x_{k_{l_n}},y_{k_{l_n}})\leq\operatorname{diam}(A)$$

και άρα από το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών προκύπτει $\rho(x_{k_{l_n}},y_{k_{l_n}})\to\operatorname{diam}(A)$.

Εφόσον όμως $x_{k_{l_n}}\xrightarrow{\rho}a$ και $y_{k_{l_n}}\xrightarrow{\rho}\beta$ θα έχουμε επίσης ότι $\rho(x_{k_{l_n}},y_{k_{l_n}})\to\rho(a,\beta)$. Επομένως από τη μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας συμπεραίνουμε ότι $\rho(a,\beta)=\operatorname{diam}(A)$.

Θέμα 4.

(α) Ο μετρικός χώρος (X,ρ) καλείται συνεκτικός αν δεν υπάρχουν δύο μη κενά ξένα και ανοικτά υποσύνολα A,B του X ώστε $X=A\cup B$.

Ένα υποσύνολο $A\subseteq X$ λέγεται συνεκτικό αν ο μετρικός χώρος (A,ρ_A) (όπου ρ_A είναι η σχετική μετρική) είναι συνεκτικός μετρικός χώρος (δηλαδή αν δεν υπάρχουν δύο μη κενά, ξένα και ανοικτά στη σχετική μετρική υποσύνολα B, Γ του A ώστε $A = B \cup \Gamma$).

(β) ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι ο (X, ρ) είναι συνεκτικός. Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι υπάρχει $f : X \to \{0, 1\}$ συνεχής και επί. Εφόσον η f είναι επί τα σύνολα $A = f^{-1}(\{0\})$ και $B = f^{-1}(\{1\})$ είναι μη κενά. Επίσης, εφόσον τα $\{0\}$, $\{1\}$ είναι ξένα οι αντίστροφες εικόνες τους μέσω της f, δηλαδή τα σύνολα A, B θα είναι ξένα υποσύνολα του X. Τέλος, εφόσον η f είναι συνεχής και τα $\{0\}$ και $\{1\}$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\{0, 1\}$ στη σχετική μετρική τα σύνολα A, B είναι ανοικτά υποσύνολα του X. Έτσι έχουμε $X = A \cup B$ με τα A, B να είναι μη κενά ξένα και ανοικτά υποσύνολα του X, άτοπο διότι ο X είναι συνεκτικός. Επομένως δεν υπάρχει $f : X \to \{0, 1\}$ συνεχής και επί.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι ο (X, ρ) δεν είναι συνεκτικός. Τότε υπάρχουν δύο μη κενά ξένα και ανοικτά υποσύνολα A, B του X ώστε $X = A \cup B$. Ορίζουμε $f : X \to \{0, 1\}$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in B$. Εφόσον τα A, B είναι μη κενά, η f είναι επί. Η f είναι επίσης συνεχής εφόσον η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοικτού υποσυνόλου του $\{0, 1\}$ είναι ανοικτό συποσύνολο του X (το $\{0, 1\}$ έχει τη διακριτή μετρική και όλα τα υποσύνολά του είναι ανοικτά, ενώ $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{0, 1\}) = X$, $f^{-1}(\{0\}) = A$ και $f^{-1}(\{1\}) = B$ με τα τέσσερα αυτά σύνολα να είναι όλα ανοικτά στο X). Έτσι η f είναι συνεχής και επί άτοπο. Επομένως ο (X, ρ) είναι συνεκτικός.

(γ) Αν το A είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που δεν είναι διάστημα τότε υπάρχουν $x, y \in A$ με $x < y$ και $z \in \mathbb{R}$ με $x < z < y$ ώστε $z \notin A$.

Θέτουμε $B = A \cap (-\infty, z)$ και $\Gamma = A \cap (z, +\infty)$. Τα σύνολα B, Γ είναι μη κενά (εφόσον $x \in B$ και $y \in \Gamma$) και ξένα (αφού $B \subseteq (-\infty, z)$ και $\Gamma \subseteq (z, +\infty)$ με τα $(-\infty, z)$ και $(z, +\infty)$ να είναι ξένα). Τα σύνολα B, Γ είναι ανοικτά στο A (ως τομές του A με ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$). Τέλος $B \cup \Gamma = \big(A \cap (-\infty, z)\big) \cup \big(A \cap (z, +\infty)\big) = A \cap \big((-\infty, z) \cup (z, +\infty)\big) = A \cap (\mathbb{R} \setminus \{z\}) = A$ εφόσον $z \notin A$. Επομένως (με βάση τον ορισμό) το σύνολο A δεν είναι συνεκτικό.

Θέμα 5.

(α) Δείχνουμε ότι η σ ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής.

(i) [Μη αρνητική] Για κάθε $(x, y), (x', y') \in Z$ έχουμε $\sigma\Big((x, y), (x', y')\Big) = \rho(x, x') + d(y, y') \geq 0$ [διότι εφόσον οι ρ και d είναι μετρικές ισχύει $\rho(x, x') \geq 0$ και $d(y, y') \geq 0$].

(ii) [Θετικά ορισμένη] Αν $(x, y), (x', y') \in Z$ ώστε $\sigma\Big((x, y), (x', y')\Big) = 0$ δηλαδή $\rho(x, x') + d(y, y') = 0$ τότε [εφόσον $\rho(x, x') \geq 0$ και $d(y, y') \geq 0$] συμπεραίνουμε ότι $\rho(x, x') = 0$ και $d(y, y') = 0$ και άρα $x = x'$ [εφόσον η ρ είναι μετρική] και $y = y'$ [εφόσον η d είναι μετρική] και έτσι έχουμε $(x, y) = (x', y')$.

(iii) [Συμμετρική] Αν $(x, y), (x', y') \in Z$ τότε $\sigma\Big((x, y), (x', y')\Big) = \rho(x, x') + d(y, y') = \rho(x', x) + d(y', y) = \sigma\Big((x', y'), (x, y)\Big)$ [όπου χρησιμοποιήσαμε ότι ισχύει $\rho(x, x') = \rho(x', x)$ και $d(y, y') = d(y', y)$ εφόσον οι ρ και d είναι μετρικές].

(iv) [Τριγωνική ανισότητα] Αν $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in Z$ τότε $\sigma\Big((x, y), (x'', y'')\Big) = \rho(x, x'') + d(y, y'') \leq \rho(x, x') + \rho(x', x'') + d(y, y') + d(y', y'') = \Big(\rho(x, x') + d(y, y')\Big) + \Big(\rho(x', x'') + d(y', y'')\Big) = \sigma\Big((x, y), (x', y')\Big) + \sigma\Big((x', y'), (x'', y'')\Big)$ [όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\rho(x, x'') \leq \rho(x, x') + \rho(x', x'')$ και $d(y, y'') \leq d(y, y') + d(y', y'')$ από την τριγωνική ιδιότητα των μετρικών ρ και d].

Επομένως η σ είναι μετρική.

(β) ($\Leftarrow$) Αν $x_n \overset{\rho}{\to} x$ και $y_n \overset{d}{\to} y$ τότε $\rho(x_n, x) \to 0$ και $d(y_n, y) \to 0$. Άρα προκύπτει $\rho(x_n, x) + d(y_n, y) \to 0$ δηλαδή $\sigma\Big((x_n, y_n), (x, y)\Big) \to 0$, συνεπώς $(x_n, y_n) \overset{\sigma}{\to} (x, y)$.

($\Rightarrow$) Αν $(x_n, y_n) \overset{\sigma}{\to} (x, y)$, δηλαδή αν $\rho(x_n, x) + d(y_n, y) \to 0$ τότε εφόσον $0 \leq \rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x) + d(y_n, y)$ από το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών προκύπτει $\rho(x_n, x) \to 0$ δηλαδή $x_n \overset{\rho}{\to} x$. Ομοίως, εφόσον $0 \leq d(y_n, y) \leq \rho(x_n, x) + d(y_n, y)$ από το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών προκύπτει $d(y_n, y) \to 0$ δηλαδή $y_n \overset{d}{\to} y$.

(γ) Για να δείξουμε ότι ο (Z, σ) είναι πλήρης αρκεί να δείξουμε ότι καθε βασική ακολουθία του είναι συγκλίνουσα. Έστω λοιπόν (x_n, y_n) τυχαία βασική ακολουθία στον Z.

Δείχνουμε αρχικά ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στον (X, ρ) και η ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στον (Y, d). Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στο Z υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ να ισχύει $\sigma\Big((x_n, y_n), (x_m, y_m)\Big) < \varepsilon$, δηλαδή $\rho(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) < \varepsilon$. Συνεπώς (εφόσον $\rho(x_n, x_m) \geq 0$ και $d(y_n, y_m) \geq 0$) προκύπτει ότι για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ και $d(y_n, y_m) < \varepsilon$. Έτσι έχει δειχθεί ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον (X, ρ) και η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον (Y, d).

Εφόσον ο (X, ρ) είναι πλήρης συπεραίνουμε ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \overset{\rho}{\to} x$, ενώ εφόσον ο (Y, d) είναι πλήρης υπάρχει $y \in Y$ ώστε $y_n \overset{d}{\to} y$. Από το προηγούμενο ερώτημα συμπεραίνουμε ότι $(x_n, y_n) \overset{\sigma}{\to} (x, y)$.

Επομένως, εφόσον αποδείξαμε ότι κάθε βασική ακολουθία στον (Z, σ) είναι συγκλίνουσα, ο (Z, σ) είναι πλήρης.

(δ) Εφόσον (σύμφωνα με τη θεωρία) η συμπάγεια είναι ισοδύναμη με την ακολουθιακή συμπάγεια, αρκεί να δείξουμε ότι ο χώρος (Z, σ) είναι ακολουθιακά συμπαγής, δηλαδή ότι κάθε ακολουθία στο Z έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω λοιπόν $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τυχαία βασική ακολουθία στον Z.

Εφόσον ο (X, ρ) είναι συμπαγής (άρα ακολουθιακά συμπαγής) και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο X, υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x \in X$ ώστε $x_{k_n} \overset{\rho}{\to} x$. Η $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στον συμπαγή (άρα ακολουθιακά συμπαγή) Y και άρα υπάρχει υπακολουθία $(y_{k_{l_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $y \in Y$ ώστε $y_{k_{l_n}} \overset{d}{\to} y$. Εφόσον η $(x_{k_{l_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ και ισχύει $x_{k_n} \overset{\rho}{\to} x$ θα έχουμε $x_{k_{l_n}} \overset{\rho}{\to} x$. Έτσι, εφόσον $x_{k_{l_n}} \overset{\rho}{\to} x$ και $y_{k_{l_n}} \overset{d}{\to} y$ από το ερώτημα (β) θα έχουμε $(x_{k_{l_n}}, y_{k_{l_n}}) \overset{\sigma}{\to} (x, y)$.

Έτσι αποδείχθηκε ότι ο (Z, σ) είναι ακολουθιακά συμπαγής, άρα συμπαγής.

Θέμα 6.

(α) Έστω $x \in X$ τυχαίο. Ισχύει $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_\rho(x, n)$ [Πράγματι, για τυχόν $y \in X$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $n > \rho(y, x)$ και άρα $y \in B_\rho(x, n)$]. Εφόσον τα σύνολα $B_\rho(x, n)$, $n \in \mathbb{N}$ είναι ανοικτά (ως ανοικτές μπάλες) και ο (X, ρ) είναι συμπαγής, θα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ ώστε $X = \bigcup\limits_{i=1}^{k} B_\rho(x, n_i)$. Θέτοντας $M = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ έχουμε $X = B_\rho(x, M)$ και άρα το X είναι φραγμένο αφού $\operatorname{diam}(X) \leq 2M < +\infty$.

(β) Παρατηρούμε ότι αν $x, y \in X$ τότε ισχύει $\rho(f^n(x), f^n(y)) \leq M^n \rho(x, y)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

όπως προκύπτει εύκολα με επαγωγή. Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\rho(f^n(x), f^n(y)) \leq M^n \operatorname{diam}(X)$ για κάθε $x, y \in X$, επομένως $\operatorname{diam}(f^n(X)) \leq M^n \operatorname{diam}(X)$ [διότι η διάμετρος του $f^n(X)$ είναι $\operatorname{diam}(f^n(X)) = \sup\{\rho(f^n(x), f^n(y)) : \ x, y \in X\}$]. Εφόσον $0 \leq M < 1$ έχουμε ότι $M^n \to 0$ και άρα $\operatorname{diam}(f^n(X)) \to 0$.

(γ) **1 $\underline{\text{os}}$ Τρόπος**

Παρατηρούμε ότι (όπως προκύπτει εύκολα χρησιμοποιώντας επαγωγή) η ακολουθία συνόλων $(f^n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, εφόσον η f^n είναι συνεχής (ως σύνθεση συνεχών) και ο X είναι συμπαγής, το $f^n(X)$ είναι συμπαγές άρα κλειστό. Επίσης, όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα, $\operatorname{diam}(f^n(X)) \to 0$. Εφόσον ο (X, ρ) είναι συμπαγής είναι πλήρης μετρικός χώρος. Έτσι (εφόσον ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος του Cantor για τον χαρακτηρισμό των πλήρων μετρικών χώρων) συμπεραίνουμε ότι η τομή $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f^n(X)$ είναι μονοσύνολο, δηλαδή υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f^n(X) = \{x_0\}$.

Απομένει να δείξουμε ότι για το x_0 που βρήκαμε προηγουμένως ισχύει $f(x_0) = x_0$. Παρατηρούμε ότι αφού $x_0 \in f^n(X)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θα έχουμε $f(x_0) \in f(f^n(X)) = f^{n+1}(X)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε δείξει δηλαδή ότι $f(x_0) \in f^m(X)$ για κάθε $m \geq 2$ (εφόσον κάθε φυσικός $m \geq 2$ γράφεται $m = n + 1$ με $n \in \mathbb{N}$), ενώ προφανώς $f(x_0) \in f(X)$. Συνεπώς $f(x_0) \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} f^m(X) = \{x_0\}$ άρα $f(x_0) = x_0$.

2 $\underline{\text{os}}$ Τρόπος

Εφόσον ο (X, ρ) είναι συμπαγής μετρικός χώρος είναι πλήρης. Αφού η $f : X \to X$ είναι συνάρτηση συστολής, από το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach υπάρχει (μοναδικό) $y_0 \in X$ ώστε $f(y_0) = y_0$. Απομένει να δειχθεί ότι $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f^n(X) = \{y_0\}$.

Άμεσα, χρησιμοποιώντας επαγωγή, προκύπτει ότι $f^n(y_0) = y_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $y_0 \in f^n(X)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συνεπώς $\{y_0\} \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f^n(X)$. Αν τώρα $z \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f^n(X)$, τότε τα z, y_0 ανήκουν στο σύνολο $f^n(X)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ άρα θα ισχύει $0 \leq \rho(z, y_0) \leq \operatorname{diam}(f^n(X))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εφόσον $\operatorname{diam}(f^n(X)) \to 0$, συμπεραίνουμε ότι $\rho(z, y_0) = 0$, άρα $z = y_0$. Συνεπώς $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f^n(X) \subseteq \{y_0\}$.

Επομένως $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f^n(X) = \{y_0\}$.

Σημείωση:

Αν χρησιμοποιήσουμε και τα δύο θεωρήματα (που χρησιμοποιήσαμε στον 1 $\underline{o}$ και το 2 $\underline{o}$ τρόπο), δεν γνωρίζουμε αν το σημείο που προκύπτει είναι το ίδιο.